Title	Restriction theoremと極限吸収(スペクトル・散乱理論とその周辺)
Author(s)	保城, 寿彦
Citation	数理解析研究所講究録 (1997), 994: 121-130
Issue Date	1997-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/61200
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
994 巻 1997 年 121-130

Restriction theorem と極限吸収

姫路工業大学　理学部　　保城　寿彦

1 序

本稿の主な目的は S. Agmon [1] が示した様な極限吸収の原理に関する評価式を示すことにある。 結果が得られた背景には次の 3 つの事柄についての評価式が相互に深く関連しあたかも三位一体の様を呈していることが上げられる: (i) restriction theorem (ii) 極限吸収の原理 (iii) 分散型方程式に対する smoothing effect。 本稿ではまずこれら 3 者の関連について説明し、次に結果について述べ、最後にどの様に 3 者の関連を用いて証明するか説明する。

2 背景

まず第 1 に restriction theorem について説明する。 関数 $f(x)$ の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の subset S(主にかんがえるのは hypersurface の場合)に制限することを考える。 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ なら $\hat{f}(\xi)|_{\xi\in S} \in L^\infty(S)$ であることは明らかである。 実はこの様なことは他の関数空間でも成り立つことがある。最も有名な例は次の P. Tomas-E.M. Stein [8] による結果である: S が (単位) 球面であるとき $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ なら $\hat{f}(\xi)|_{\xi\in S} \in L^2(S)$ となる。ここで p は $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$ をみたすものとする。 この様な現象を研究することは６０年代末から実関数論の重要なテーマの一つとなっている。

第 2 に極限吸収の原理とは resolvent operator $R(\zeta) = (-\Delta - \zeta)^{-1}$ について複素パラメータ ζ が spectrum $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ に近づいてもある関数空間では有界にとどまっていることである。 S. Agmon [1] は次の不等式を示した: $s > \frac{1}{2}$ のとき

$$|\zeta|^{1/2}\|(1+|x|)^{-s}u\|_{L^2} \leq C_s\|(1+|x|)^s(-\Delta-\zeta)u\|_{L^2}$$

ここで C_s は $\zeta \in \mathbb{C}$ 及び u に依存しない定数である。

第 3 に分散型方程式に対する smoothing effect というのは Schrödinger 方程式の様な分散型方程式では解を時空間についての関数空間で考えると初期値より滑らかさが増す現象のことである。 これについては例えば P. Constantin- J.C. Saut [3] が次の結果を示した。

$$\phi \in L^2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow |D|^{1/2}e^{-it\Delta}\phi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

これら３者の関連について、まず

極限吸収の原理 $\Rightarrow$ restriction theorem

である。このことについては例えば S. Agmon の論文で次の関係式があげられている: $R(\zeta)=(-\Delta-\zeta)^{-1}$ とすると

$$(2\pi)^n \lim_{\zeta\to\lambda^2\in\mathbb{R}_+,\mathrm{Im}\,\zeta>0} \mathrm{Im}\ (R(\zeta)f,\, f)_{L^2} = \frac{\pi}{2\lambda}\int_{|\xi|=\lambda} |\hat{f}(\xi)|^2 dS_\lambda$$

(dS_λ :　球面 $\{|\xi|=\lambda\}$ の面積要素)

これから極限吸収の原理から球面に対する restriction theorem が導ける。

上の逆

restriction theorem $\Rightarrow$ 極限吸収の原理

は付加的条件の下に成立する。これは

$$(A(\lambda)f,\, g) = \frac{1}{2(2\pi)^n\sqrt{\lambda}}\int_{|\xi|=\sqrt{\lambda}} \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}\,dS_{\sqrt{\lambda}}$$

と定義すると

$$R(\zeta)=\int_0^\infty \frac{A(\lambda)}{\lambda-\zeta}\,d\lambda$$

という関係式からわかる。　これよりもしある作用素ノルムで λ について Hölder 連続性を持つとすると $R_\pm(\lambda)=\lim_{\zeta\to\lambda\in\mathbb{R}_+,\,\mathrm{Im}\,\zeta\gtrless 0} R(\zeta)$ も同じ性質を持つことがわかる。

他の関係では

restriction theorem $\Rightarrow$ 同次方程式の解についての smoothing effect

極限吸収の原理 $\Rightarrow$ 非同次方程式の解についての smoothing effect

となる。　後者については例えば

$$(*)\begin{cases} i\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta u &= f,\\ u|_{t=0} &= 0\end{cases}$$

の解 u が

$$u(t,\cdot)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\tau}\frac{R_+(\tau)+R_-(\tau)}{2}\tilde{f}(\tau,\cdot)\,d\tau$$

と表せることからわかる。 ここで $\tilde{f}(\tau,\cdot)$ は関数 f の t に関する部分 Fourier 変換である。

3 結果

結果は2つの部分に分かれている。 まず Λ を単位球面 S^{n-1} 上の Laplace-Beltrami 作用素、つまり

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\Lambda}{r^2}$$

とする（$r=|x|$）。$-\Lambda$ の固有値は

$$\lambda_k=k(k+n-2),\quad k=0,1,2,\dots$$

であり λ_k に対応する固有空間（ k 次球面調和関数）への射影 H_k は

$$H_kf(\omega)=\frac{\nu+k}{\nu|S^{n-1}|}\int_{|\tilde{\omega}|=1}C_k^{\nu}(\omega\cdot\tilde{\omega})f(\tilde{\omega})\,d\tilde{\omega}$$

と積分作用素として表すことができる。 ここで $\nu=\frac{n-2}{2}$, $C_k^{\nu}(z)$: Gegenbauer 多項式, $\omega\cdot\tilde{\omega}=\sum_{j=1}^{n}\omega_j\cdot\tilde{\omega_j}$, $|S^{n-1}|$: 単位球面の面積 である。 従ってこのことから作用素 $(I-\Lambda)^{\alpha}$ は

$$(I-\Lambda)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}(1+\lambda_k)^{\alpha}H_k$$

と表すことができる。 まず次の様な restriction theorem が成り立つ。

定理 1. $n\geq 3$, $\frac{1}{2}<s<\frac{n}{2}$ と仮定する。 このとき

$$(A(\lambda)f,\,f)\leq C\,\lambda^{s-1}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2s}\left|(I-\Lambda)^{-\frac{2s-1}{4}}f(x)\right|^2dx \tag{1}$$

ここで定数 C は $f,\lambda(>0)$ に依存しない。

更に $A(\lambda)$ が λ について Hölder 連続性を持つことに着目すると次の様な極限吸収原理に関する評価を得ることができる。

定理　2. $n \geq 3,\ 0 < \alpha < \frac{1}{2},\ \alpha' > \alpha$ と仮定する。　このとき次が成立する。

$$\| |x|^{\alpha-1}(I-\Lambda)^{\frac{1-2\alpha'}{2}}|D|^{2\alpha}u\| \leq C\| |x|^{1-\alpha}(-\Delta-\zeta)u\| \tag{2}$$

ここで $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, C は u 及び $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$ に依存しない定数である。

上の定理より直ちに初期値問題 (*) の解について次を得る。

系.　定理 2 の仮定の下に (*) の解について次が成立する。

$$\| |x|^{\alpha-1}(I-\Lambda)^{\frac{1-2\alpha'}{2}}|D|^{2\alpha}u\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C\| |x|^{1-\alpha}f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

ここで C は f に依存しない定数である。

次に述べる定理はこれまでとは違った approach によって得られる。

定理　3. $n \geq 3,\ \frac{1}{p}-\frac{1}{q} \leq \frac{2}{n},\ \frac{n+1}{2} < \frac{n}{p}-\frac{1}{q},\ \frac{n}{q}-\frac{1}{p} < \frac{n-3}{2}$ を仮定する。

$$\alpha = 1 - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$$

とおく。このとき次が成立する。

$$\| |D|^{2\alpha}u\|_{L^q} \leq C\|(-\Delta-\zeta)u\|_{L^p} \tag{3}$$

ここで C は u 及び $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$ に依存しない定数である。

定理　4. $n \geq 3,\ \frac{n-1}{2(n+1)} < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} < \frac{n+3}{2(n+1)},\ s+s' \leq 2-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right),\ \frac{s}{n}+s' > -\frac{1}{p}+\frac{n}{q}-\frac{n-3}{2},$
$s+\frac{s'}{n} > -\frac{n}{p}+\frac{1}{q}+\frac{n+1}{2}$ と仮定する。

$$\alpha = 1 - \frac{s+s'}{2} - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$$

とおく。　このとき次が成立する。

$$\| |x|^{-s'}|D|^{2\alpha}u\|_{L^q} \leq C\| |x|^{s}(-\Delta-\zeta)u\|_{L^p} \tag{4}$$

ここで C は u 及び $\zeta \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$ に依存しない定数である。

4　証明の概略

まず定理 1 の証明に関して次が成り立つ

命題 1.

$$(A(\lambda)f,\, f) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{|\omega|=1}\left|\int_0^{\infty} J_{\nu+k}(\sqrt{\lambda}r)r^{n/2}H_k f(r,\omega)\,dr\right|^2 d\omega.$$

(ここで $J_{\nu+k}$ は $\nu+k$ 次 *Bessel* 関数)

上の恒等式の証明はさらに次の Bessel 関数についての古典的な公式による。

$$\int_{|\xi|=\sqrt{\lambda}} e^{i(y-x)\xi}dS_{\sqrt{\lambda}} = \lambda^{(n-1)/2}\int_{|\omega|=1} e^{i(y-x)\sqrt{\lambda}\omega}d\omega$$

$$= \lambda^{(n-1)/2}(2\pi)^{n/2}\frac{J_\nu(\sqrt{\lambda}|x-y|)}{\left|\sqrt{\lambda}|x-y|\right|^{\nu}},$$

$$\frac{J_\nu(|x-y|)}{|x-y|^\nu} = 2^\nu\Gamma(\nu)\sum_{k=0}^{\infty}(\nu+k)\frac{J_{\nu+k}(r)}{r^\nu}\frac{J_{\nu+k}(\rho)}{\rho^\nu}C_k^\nu(\omega_1\cdot\omega_2),$$

$$(x = r\omega_1, \quad y = \rho\omega_2)$$

$$\frac{\nu+k}{\nu|S^{n-1}|}\int_{|\omega|=1} C_k^\nu(\omega_1\cdot\omega)C_\ell^\nu(\omega\cdot\omega_2)\,d\omega = \delta_{k\ell}C_k^\nu(\omega_1\cdot\omega_2).$$

更に次の Weber-Schaftheitlin 積分についての公式に注意する。

$$\int_0^\infty J_{\nu+k}(r)^2 r^{1-2s}dr = \frac{\Gamma(2s-1)\Gamma(\nu+k-s+1)}{2^{2s-1}\Gamma(s)^2\Gamma(\nu+k+s)} \quad \sim \quad (1+k)^{1-2s} \quad \text{as} \quad k\to\infty$$

すると定理 1 は次のようにして証明できる。

$$\begin{aligned}
&(A(\lambda)f,\, f)\\
&\le \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^\infty J_{\nu+k}(\sqrt{\lambda}r)^2 r^{1-2s}dr\right)\left(\int_{|\omega|=1}\int_0^\infty |r^s H_k f(r,\omega)|^2 r^{n-1}drd\omega\right)\\
&= \frac{1}{2}\lambda^{s-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^\infty J_{\nu+k}(r)^2 r^{1-2s}dr\right)\left(\int_{|\omega|=1}\int_0^\infty |r^s H_k f(r,\omega)|^2 r^{n-1}drd\omega\right)\\
&\le C\lambda^{s-1}\sum_{k=0}^{\infty}(1+k)^{1-2s}\left(\int_0^\infty |r^s H_k f(r,\omega)|^2 r^{n-1}drd\omega\right)\\
&\le C\,\lambda^{s-1}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2s}\left|(I-\Lambda)^{-\frac{2s-1}{4}}f(x)\right|^2dx
\end{aligned}$$

定理2は

$$|D|^{2\alpha}(-\Delta-\zeta)^{-1}=\int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha A(\lambda)}{\lambda-\zeta}d\lambda$$

だから $B(\lambda)=\lambda^\alpha A(\lambda)$ の作用素ノルムでの Hölder 連続性をいう必要がある。 これについては定理1の場合と同じ様に Bessel 関数についての古典的事実より次を得ることができる（証明略）。

補題 2.

(i)

$$|(H_k B(\lambda)f,g)|\leq C(1+k)^{2\alpha-1}\||x|^{1-\alpha}H_k f\|_{L^2}\||x|^{1-\alpha}H_k g\|_{L^2}$$

(ii)

$$\begin{aligned}|(H_k(B(\lambda)-B(\mu))f,g)|\leq & C_\theta(1+k)^{2\alpha-1}\left|(\lambda\vee\mu)^{-1}(1+k)|\lambda-\mu|\right|^{\theta/2}\\ &\times\||x|^{1-\alpha}H_k f\|_{L^2}\||x|^{1-\alpha}H_k g\|_{L^2}\quad(0\leq\theta\leq 1).\end{aligned}$$

また $\zeta=0$ の場合には次がなりたつ。

命題 3. α は $0<\alpha<\frac{1}{2}$ となるものとする。このとき

$$|(|D|^{2(\alpha-1)}f,f)|\leq C\|(I-\Lambda)^{\frac{2\alpha-1}{4}}|x|^{1-\alpha}f\|_{L^2}^2,$$

ここで定数 C は $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に依存しない。

ここで関数空間を次のように導入する。

$$F_\alpha=\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)|\quad |x|^{1-\alpha}f\in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$
$$G_{\alpha,\alpha'}=\{f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)|\quad |x|^{\alpha-1}(I-\Lambda)^{\frac{1-2\alpha'}{2}}f\in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

すると補題2は $B(\lambda)$ が F_α から $G_{\alpha,\alpha'}$ への作用素で（ $\alpha<\frac{1}{2}$, $\alpha<\alpha'$ ），しかも$\lambda>0$ についての局所 Hölder 連続な関数となっていることを言っており、命題3は $|D|^{2(\alpha-1)}$ が F_α か

への作用素であることを言っている。これらから定理2が証明できる。まず ζ がスペクトル $[0, \infty)$ からはなれている場合

$$
\begin{aligned}
&|(|D|^{2\alpha}(-\Delta-\zeta)^{-1}f, g)| \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^n}\int\left|\frac{|\xi|^{2\alpha}}{|\xi|^2-\zeta}\right||\hat{f}(\xi)||\hat{g}(\xi)|d\xi \\
&\le C\int|\xi|^{2(\alpha-1)}|\hat{f}(\xi)||\hat{g}(\xi)|d\xi \\
&\le C(|D|^{2(\alpha-1)}(I-\Lambda)^{\frac{1-2\alpha}{2}}f, f)^{1/2}(|D|^{2(\alpha-1)}(I-\Lambda)^{\frac{2\alpha-1}{2}}g, g)^{1/2} \\
&\le C'\||x|^{1-\alpha}f\|_{L^2}\||x|^{1-\alpha}(I-\Lambda)^{\frac{2\alpha-1}{2}}g\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

と F_α から $G_{\alpha,\alpha}$ への有界作用素となる。

従って残りは ζ がスペクトルに近づく場合であるが、これはまた scaling により $\||D|^{2\alpha}(-\Delta-(1\pm i\epsilon))^{-1}\|_{\mathcal{L}(F_\alpha, G_{\alpha,\alpha'})}$ が $\epsilon\to 0$ としても有界にとどまることさえ示せばよい。ここで $\chi(\lambda)\in C_0^\infty[\frac{1}{2}, 2]$ を $\lambda=1$ の近傍で $\chi(\lambda)=1$ となるものとして

$$
\begin{aligned}
&|D|^{2\alpha}(-\Delta-(1+i\epsilon))^{-1} \\
&=\int_0^\infty\chi(\lambda)\frac{B(\lambda)}{\lambda-(1+i\epsilon)}d\lambda+\int_0^\infty(1-\chi(\lambda))\frac{B(\lambda)}{\lambda-(1+i\epsilon)}d\lambda \\
&=R_1+R_2
\end{aligned}
$$

と分解すると $\|R_2\|_{\mathcal{L}(F_\alpha, G_{\alpha,\alpha})}$ は ζ がスペクトルからはなれているときとおなじようにすれば有界にとどまることが示せる。他方 $\|R_1\|_{\mathcal{L}(F_\alpha, G_{\alpha,\alpha'})}$ についてはつぎの命題による（定理2の証明終わり）。

<u>命題 4</u>. F_1 と F_2 は *Banach* 空間、$P(\lambda)$ は $\mathcal{L}(F_1, F_2)$ に値をとる（$\lambda>0$ に関して）*Hölder* 連続な関数で *support* が $(0,\infty)$ で *compact* で $\lambda=1$ の近傍に入ると仮定する。このとき

$$
Q(\zeta)=\int_0^\infty\frac{P(\lambda)}{\lambda-\zeta}d\lambda
$$

とおくと集合 $\{Q(1\pm i\epsilon)\}_{\epsilon>0}$ は $\mathcal{L}(F_1, F_2)$ で有界となる。

定理3の証明で ζ がスペクトルから離れている場合には Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式でもって容易にしめすことができる。 実際 p 及び q を $1<p<2<q<\infty$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{2(1-\alpha)}{n}$

をみたすとすると

$$
\begin{aligned}
&|(|D|^{2\alpha}(-\Delta-\zeta)^{-1}f,g)| \\
&\leq C\int|\xi|^{2(\alpha-1)}|\hat{f}(\xi)||\hat{g}(\xi)|d\xi \\
&\leq C(|D|^{n(1-\frac{2}{p})}f,f)^{1/2}(|D|^{n(\frac{2}{q}-1)}g,g)^{1/2} \\
&\leq C\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{\frac{q}{q-1}}}
\end{aligned}
$$

となるからである。また定理2の証明と同様にして $\|R_2\|_{\mathcal{L}(L^p,L^q)}$ も $\epsilon\to 0$ としても有界にとどまることがわかる。 したがって $\|R_1\|_{\mathcal{L}(L^p,L^q)}$ の挙動を調べることが主な仕事であるがそのためには少し準備が必要となる。

まず $K_{z,\zeta}(x-y)$ を作用素 $(-\Delta-\zeta)^{z-\frac{n}{2}}$ の核とする。また Γ_+ を

$$
\Gamma_+=\{\zeta\in\mathbb{C}|\quad \mathrm{Im}\,\zeta>0,\ \frac{1}{2}\leq|\zeta|\leq 2\}
$$

と定義する（Γ_- も同様である）。 このとき次が成立する（証明略）。

<u>補題 5</u>. ζ と ζ' はともに Γ_+ または Γ_- に入るものとする。このとき $-\frac{1}{2}<Re\ z<\frac{1}{2}$ および $max(0,2Re\ z)\leq\mu<Re\ z+\frac{1}{2}$ に対して定数 C が存在して

$$
|K_{z,\zeta}(x)|\leq C\frac{e^{C|\mathrm{Im}\ z|}}{|x|^{\mu}}
$$

$$
|K_{z,\zeta}(x)-K_{z,\zeta'}(x)|\leq C\frac{e^{C|\mathrm{Im}\ z|}|\zeta-\zeta'|^{\theta}}{|x|^{\mu}}
$$

となる。 ただしここで $\theta=Re\ z+\frac{1}{2}-\mu$ である。

この補題から resolvent operator $R(\zeta)$ についての評価に関する情報が得られる。

<u>命題 6</u>. ζ 及び ζ' はともに Γ_+ または Γ_- に入るものとする。p 及び q は定理3の仮定をみたすとする。 このとき次が成立する。

$$
\|R(\zeta)u\|_{L^q}\leq C\|u\|_{L^p}
$$

$$
\|[R(\zeta)-R(\zeta')]u\|_{L^q}\leq C|\zeta-\zeta'|^{\theta}\|u\|_{L^p}
$$

ここで正定数 θ 及び C は $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, ζ, ζ' に依存しない。

(証明) まず、まえの補題と Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式から次の評価がいえる。

$$\|(-\Delta-\zeta)^{z-\frac{n}{2}}u\|_{L^q} \le C\,e^{C|\mathrm{Im}\,z|}\|u\|_{L^p}$$

$$\|[(-\Delta-\zeta)^{z-\frac{n}{2}}-(-\Delta-\zeta')^{z-\frac{n}{2}}]u\|_{L^q} \le C\,e^{C|\mathrm{Im}\,z|}|\zeta-\zeta'|^\theta\|u\|_{L^p}$$

ここで $-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,z<\frac{1}{2}$, $1<p<q<\infty$, $\max(0,\,2\mathrm{Re}\,z) \le n\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)<\mathrm{Re}\,z+\frac{1}{2}$, $\theta=\mathrm{Re}\,z+\frac{1}{2}-n\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$ である。

他方

$$|(|\xi|^2-\zeta)^{i\gamma}| \le e^{\pi|\gamma|} \quad \text{for } \zeta\in\mathbb{C},\ \gamma\in\mathbb{R}$$

であるので Plancherel の等式より

$$\|(-\Delta-\zeta)^{i\gamma}u\|_{L^2} \le e^{\pi|\gamma|}\|u\|_{L^2}$$

となる。 これらを複素補間し、z が $-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}\,z<\frac{1}{2}$ の範囲を動くときの $(\frac{1}{p},\frac{1}{q})$ が動く範囲の union をとると命題6が得られる。

以上より

$$A(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\downarrow 0}[R(\lambda+i\epsilon)-R(\lambda-i\epsilon)]$$

及び $B(\lambda)$ が定理3の p,q の範囲で $\mathcal{L}(L^p,L^q)$ に値をとる関数として局所 Hölder 連続となっていることがいえる。 従って定理2の証明と同様に命題4によって $\|R_1\|_{\mathcal{L}(L^p,L^q)}$ が $\epsilon\to 0$ としても有界にとどまることがわかる。よって定理3が証明された。

(定理4の証明) 定理4では定理3の証明において Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式を使うかわりに次の Stein-Weiss によって示された Riesz 作用素についての重み付き評価式をもちいる。

<u>命題 7</u>. *(Stein-Weiss)* $0<\mu<n$ に対し

$$T_\mu f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^\mu}\,dy$$

とおく。$1 < p \le q < \infty$, $s < n/p'$ （p' は $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ で定義する），$s' < n/q$, $s + s' \ge 0$,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\mu + s + s'}{n} - 1$$

と仮定する。このとき

$$\||x|^{-s'} T_\mu f\|_{L^q} \le C \||x|^s f\|_{L^p}$$

となる。 ただしここで定数 C は $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に依存しない。

References

0. T. Hoshiro, *On weighted L^2 estimates of solutions to wave equations*, preprint.
1. S. Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Pisa Serie IV **2** (1975), 150–218.
2. M. Ben-Artzi and S. Klainerman, *Decay and regularity for the Schrödinger equation*, Jour.d'Analyse Math. **58** (1992), 25–37.
3. P. Constantin and J.C. Saut, *Local smoothing properties of dispersive equations*, Jour. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 413–439.
4. T. Kato and K. Yajima, *Some examples of smooth operators and the associated smoothing effect*, Rev. Math. Phys. **1** (1989), 481–496.
5. C. Kenig, A. Ruiz and C.D. Sogge, *Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators*, Duke Math. J. **55** (1987), 329–347.
6. E.M. Stein and G. Weiss, *Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space*, J. of Math. and Mech. **7** (1958), 503–514.
7. R.S. Strichartz, *Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions to wave equations*, Duke Math. J **44** (1977), 705–714.
8. P. Tomas, *A restriction theorem for the Fourier transform*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 477–478.

姫路工業大学　理学部

671-22 兵庫県姫路市書写 2167

e-mail: hoshiro@sci.himeji-tech.ac.jp